الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات

مديرية التربية لولاية غرداية
المقاطعة التفتيشية الأولى
دورة: ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^n - 1$

(v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

3) احسب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n

حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و v_n

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي نحقق $v_n \equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما

3) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن: $S''_n \equiv S'_n[3]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z:

$$(E): \ldots\ z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه ،

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، تعطى الحلول على الشكل الأسي..

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D

3) التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)}$ ، $z_C = 2i$ و $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + i$

أ) بين العددين المركبين z_A و z_B مترافقان واستنتج أن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z - z_A = \dfrac{1}{\bar{z} - z_B}$ هي دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة (العدد المركب $\bar{z}$ هو مرافق العدد المركب z)

ب) برر وجود التشابه المباشر S الذي يحول النقطة A إلى النقطة B والنقطة O إلى النقطة D ، ثم جد العبارة المركبة له مستنتجا عناصره المميزة

ج) بين أن النقط A ، C و D في استقامية واستنتج العناصر المميزة للتحاكي h الذي مركزه C ويحول D إلى A وأن B هي صورة D بتشابه مباشر مركزه C محددا نسبته وزاوية له.

د) (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

عين صورة المجموعة (δ) بالتحويل S .

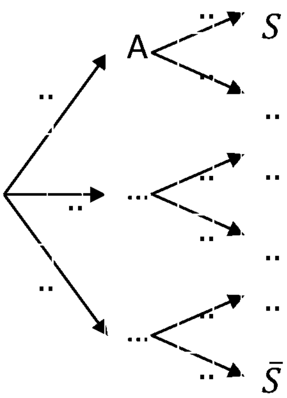
التمرين الثالث: (05 نقاط)

يقوم متجر ببيع جزء من مدخراته من قطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y و z تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما y ثلثها وتمثل z الباقي ، كانت السلعة تحوي عيوب تشمل 40% من السلعة x ، 75% من السلعة y و 24% من السلعة z ، أخذ زبون قطعة عشوائيا.

لتكن الحوادث التالية:

الحادثة A : " أخذ الزبون القطعة من السلعة x "

الحادثة B : " أخذ الزبون القطعة من السلعة y "
الحادثة C : " أخذ الزبون القطعة من السلعة z "
الحادثة S : " القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوبا "



1) أ) أتمم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة
ب) ماهو احتمال أن تكون السلعة تحوي عيبا ثم استنتج نسبة السلع السليمة
ج) القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوبا ، ما احتمال أن تكون القطعة من السلعة z
د) علما أن 180 هو إجمالي عدد القطع المعروضة للبيع ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي:

نوع القطعة	x	y	z	المجموع
عدد القطع				
عدد القطع ذات عيوب				81

2) بسبب العيوب الواضحة اضطر صاحب المتجر عزل هذه القطع وعرضها للبيع بتخفيضات هامة ، سعر القطعة x هو $65\ DA$ ، سعر القطعة y هو $80\ DA$ وسعر القطعة z هو $75\ DA$
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل من هذه الإمكانيات لبيع قطعتين معا مخفضتين سعرهما الإجمالي
أ) ما هي عدد الطرائق الممكنة لبيع قطعتين معا من السلعة المخفضة
ب) ما هي قيم X الممكنة (توجد ست قيم)
ج) أكتب قانون احتمال للمتغير العشوائي X
د) أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين والانحراف المعياري

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$
1) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم أنشئ جدول تغيراتها .
2) أثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.8 < \alpha < 1.9$
3) استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x}$
1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسرها هندسيا .
2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .
3) تعطى g دالة موجبة تماما على المجال: $]0;+\infty[$
أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$
ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$ فإن: $f(x) \in [0;1]$
ج) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن: $f(x) - x = \frac{(1-x).g(x)}{e^x-x}$ ، عين دستور الدالة g
د) استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ على المجال $[0;+\infty[$.
4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ نأخذ: $\|\vec{i}\| = 5\ cm$ و $\|\vec{j}\| = 10\ cm$
أ) تحقق أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{e-1}(x-1) + 1$
ب) أنشئ (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم
ج) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المغلق للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ)
د) ناقش بيانيا و هذا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول ومجال انتمائها للمعادلة (E) التالية:

$$(E): f(x) = mx + 1 - m$$

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
1) بين أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وحدد اتجاه تغيرها
2) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أوجد نهايتها
(ملاحظة: في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤالين 3) ب) و 3) د) من الجزء II.)

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(3;1;0)$، $B(1;2;0)$، $C(3;2;1)$ و$D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب.

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $cos\widehat{ABC}$ و $sin\widehat{ABC}$.

ب) احسب مساحة المثلث ABC.

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه، وأن حجمه $V_{ABCD}=\frac{2m+5}{6}\ u.v$ ($u.v$ وحدة الحجوم)

4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m موجب، لدينا: (S_m) سطح كرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m).

ج) اكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_2).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا: $S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(k;k+1)=1$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم فإن: $PGCD(S_{2k};S_{2k+1})=(2k+1)^2$.

3) أ) عين من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم $PGCD(2k+1;2k+3)$.

ب) عين $PGCD(S_{2k+1};S_{2k+2})$.

4) أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n: $PGCD(S_n;S_{n+1})$.

ب) استنتج $PGCD(S_{2017};S_{2018})$.

(ملاحظة: يمكن استعمال المبرهنة: $PGCD(a;b)$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2)$)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ليكن $p(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z والمعرف كما يلي: $p(z)=z^2-\left(\frac{5+i}{2}\right)z+1+i$.

أ) احسب $p(2)$.

ب) عين العددين المركبين a وb حيث: $p(z)=(z-2)\ (az+b)$.

ج) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $p(z)=0$ (نضع z_0 الحل الحقيقي و z' الحل الآخر)

2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. الوحدة $5\ cm$.

نضع $z_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $z_{n+1}=z'z_n$ (حيث z' حل المعادلة في السؤال الأول) ونسمي النقطة A_n صورة العدد المركب z_n.

أ) احسب الأعداد المركبة z_1، z_2، z_3 و z_4.

ب) مثل النقط A_0، A_1، A_2، A_3 و A_4.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_n=|z_n|$.

أ) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n)، ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية (u_n)؟

4) .

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$.

ب) استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}.

5) من أجل كل عدد طبيعي n نسمي L_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقط A_0، A_1، A_2، ...، A_n.

أ) احسب الأطوال: A_0A_1، A_1A_2 و A_2A_3.

ب) تحقق أن: $\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ج) عبر عن L_n بدلالة nثم حدد نهاية L_n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) باستعمال قابلية اشتقاق الدالة ln عند 1، بين أن: $\lim_{x\to1}\left(\frac{lnx}{x-1}\right) = 1$، ثم استنتج أن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 1$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$، وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x \geq 1)$ لدينا: $f(x) = \ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$.

ب) من أجل $(x \geq 1)$، بين أن: $x-1 = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$.

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1، وفسر النتيجة بيانيا.

2) أ) احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، لدينا: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) ارسم المنحنى (C).

3) ليكن S مساحة الحيز D المستوي المحدد بالمنحنى (C)، محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 1$ و$x = 3$، ولتكن A و B نقطتان من المنحنى (C) فاصلتاهما على الترتيب 1 و3،

والنقطتان $P\left(1;2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ و$Q(3;0)$ من المستوي.

أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ.

ب) استنتج أن $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \leq S \leq 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

III) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا: $g(x) \geq 1$.

2) أ) بين أن: $(g \circ f)(x) = x$، ثم بين أنه إذا كانت النقطة $M(x;y)$ من المنحنى (C) فإن النقطة $M'(y;x)$ من المنحنى $\left(C_g\right)$.

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و$\left(C_g\right)$؟ أنشئ $\left(C_g\right)$ في المعلم السابق.

3) ليكن S' مساحة الحيز D'المحدد بالمنحنى $\left(C_g\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$، $x = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ و$y = 3$.

أ) بين أن: $S' = 6\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$.

ب) احسب $\int_0^{2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S.